

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

*Антонов А.С., доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник ЗАО «Межрегиональная энергосберегающая компания»
Султан-Заде Т.Т., ведущий инженер ЗАО «Импеданс»*

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛЕЙ В КОАКСИАЛЬНОЙ И ОДНОПРОВОДНОЙ ЛИНИИ

В работе приводится решение задачи распространения электромагнитной волны для коаксиальной и однопроводной линии, не ограниченное случаем сильного скин-эффекта. Приведены результаты расчета затухания и радиуса поля для широкого диапазона частот и параметров линии.

Ключевые слова: коаксиальная линия, однопроводная линия, поверхностная электромагнитная волна, импеданс.

FIELD DISTRIBUTION IN THE COAXIAL AND SINGLE-WIRE TRANSMISSION LINE

The paper presents the examples of calculation of the attenuation and the radius of the field for a wide range of frequencies and parameters of a line. The calculations based on the exact solution of a task of propagation of the electromagnetic waves in a coaxial and single-wire line, not limited to the case of strong skin-effect.

Keywords: coaxial line, single-wire transmission line, surface electromagnetic wave, impedance.

Введение

В последнее время проявляется повышенный интерес к поверхностным электромагнитным волнам (ПЭВ), как к средству использования естественных коммуникаций, таких как ЛЭП, для широкополосной передачи информации на высоких частотах. Это приводит к необходимости точного решения электродинамической задачи, так как грубые оценки зачастую дают весьма приблизительный результат. В данной работе приводится такое решение, с получением практических формул, позволяющих довольно точно рассчитать характеристики ПЭВ в зависимости от частоты, проводимости провода, его радиуса и прочих условий.

Рассмотрение начинается с коаксиальной линии, что позволяет последовательно изложить методологию получения результатов. Однопроводная линия в таком подходе является частным случаем более сложной, в общем виде многослойной коаксиальной линии.

Коаксиальная линия. Постоянная распространения

Рассмотрим точную задачу о распространении волны в коаксиальной линии, не ограничиваясь случаем сильного скин-эффекта, когда на поверхности центрального провода можно использовать приближение Леонтовича [1].

В общем случае из уравнений Максвелла можно получить уравнение для продольной компоненты электрического поля во всей области задачи. Пусть положительное направление слева направо. Тогда поле волны записывается как $F = F_0 \exp(i\gamma z - i\omega t)$, а волновое число и все комплексные параметры как $\gamma = \gamma' + i\gamma''$

Из уравнений Максвелла получаем в цилиндрических координатах

[1] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.// Электродинамика сплошных сред. М.: Наука (1982) 620 с.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial r} E_z - \frac{\partial}{\partial z} E_r &= -i \frac{\omega}{c} \mu H_\varphi \\
 \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} &= i \frac{\omega}{c} \varepsilon E_r \\
 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r H_\varphi) &= -i \frac{\omega}{c} \varepsilon E_z \\
 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_r) + \frac{\partial E_z}{\partial z} &= 0
 \end{aligned} \tag{1}$$

Решив (1) относительно E_r и H_φ получим

$$E_r = \frac{i\gamma}{k^2} \frac{\partial E_z}{\partial r}, \tag{2}$$

$$H_\varphi = -i \frac{\omega}{c} \frac{\varepsilon}{k^2} \frac{\partial E_z}{\partial r}, \tag{3}$$

где $k^2 = -\gamma^2 + (\omega/c)^2 \varepsilon \mu$

Из (1)-(3) для продольной компоненты электрического поля получается уравнение Бесселя

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial r} + k^2 E_z = 0 \tag{4}$$

Рассмотрим коаксиальную линию с радиусами a и b , заполненную средой с магнитной и диэлектрической проницаемостями μ_2 и ε_2 . Центральный проводник имеет магнитную проницаемость μ_1 и диэлектрическую ε_1 . Пусть внешний проводник идеальный.

Решение уравнения (4) ищем в виде

$$\begin{aligned}
 E_z(r) &= A J_0(k_1 r) & r \leq a \\
 E_z(r) &= B_1 J_0(k_2 r) + B_2 N_0(k_2 r) & a \leq r \leq b \\
 H_\varphi(r) &= i \frac{\omega}{c} \frac{\varepsilon_1}{k_1^2} \frac{\partial E_z}{\partial r} = -i \frac{\omega}{c} \frac{\varepsilon_1}{k_1} A J_1(k_1 r) & r \leq a \\
 H_\varphi(r) &= -i \frac{\omega}{c} \frac{\varepsilon_2}{k_2} (B_1 J_1(k_2 r) + B_2 N_1(k_2 r)) & a \leq r \leq b
 \end{aligned} \tag{5}$$

Граничные условия:

$$E_z(a-0) = E_z(a+0), \quad H_\varphi(a-0) = H_\varphi(a+0), \quad E_z(b) = 0$$

Результат выпишем в следующем виде

$$\frac{J_0(k_1 a)}{J_1(k_1 a)} = \frac{k_2 \varepsilon_1 J_0(k_2 a) N_0(k_2 b) - J_0(k_2 b) N_0(k_2 a)}{\varepsilon_2 k_1 J_1(k_2 a) N_0(k_2 b) - J_0(k_2 b) N_1(k_2 a)} \quad (6)$$

Используя экстраполяцию для случая $k_1 a \ll 1$, а также для $k_2 a, k_2 b \ll 1$ из (6) получаем для данного приближения $k_2^2 = -ik_1 \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \frac{1}{a \ln b/a}$. В металле $k_1 = \frac{1+i}{\delta}$, $\delta = c/\sqrt{2\pi\sigma\mu_1\omega}$, $\varepsilon_1 = 4\pi\sigma i/\omega$, где δ – толщина скин-слоя. Для постоянной распространения получаем

$$\gamma^2 = \varepsilon_2 \mu_2 \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \left(1 + \frac{1+i}{2} \frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{\delta}{a} \frac{1}{\ln b/a}\right) \quad (7)$$

Если толщина скин-слоя в проводнике сравнима с его радиусом,

$$k_2^2 = \frac{1-i}{2} \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \frac{\mu_1 \delta \varepsilon_2}{a \ln b/a} \frac{J_0(k_1 a)}{J_1(k_1 a)} \quad (8)$$

получаем более точное выражение

$$\gamma^2 = \varepsilon_2 \mu_2 \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \left(1 - \frac{1-i}{2} \frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{\delta}{a} \frac{J_0(k_1 a)}{J_1(k_1 a)}\right) \quad (9)$$

Сравним приближение (7) с точным решением (9). Обозначим коэффициентами, по смыслу являющимися коэффициентом преломления

$$N_1 = \left(1 + \frac{1+i}{2} \frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{\delta}{a} \frac{1}{\ln b/a}\right)^{1/2} \quad (10)$$

и

$$N_2 = \left(1 - \frac{1-i}{2} \frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{\delta}{a} \frac{J_0(k_1 a)}{J_1(k_1 a)}\right)^{1/2} \quad (11)$$

Приведем оценки для типичного случая магнитоимпедансных зависимостей. В магнитоимпедансных экспериментах используются аморфные магнитомягкие микропровода радиуса порядка 10 микрон. Используем их в качестве центрального проводника типичной коаксиальной линии с внешним диаметром 7 мм. Для определенности выберем частоту 1 МГц. Магнитная проницаемость таких проводов меняется во внешнем поле в пределах $1 \div 10000$. Проводимость металла $5 \times 10^{15} \text{ сек}^{-1}$.

Из рис. 1 видно, что приближенная оценка по формуле (10) сильно искажена. Поэтому во всех случаях, когда толщина скин-слоя сравнима с радиусом проводника, следует использо-

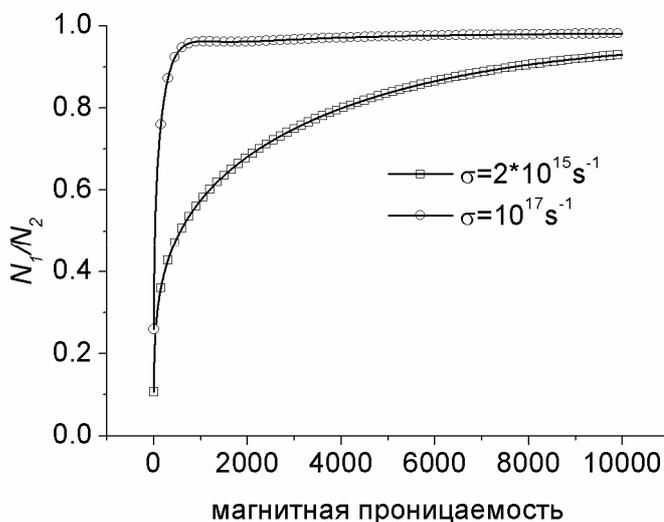


Рис.1. Сравнение приближенного (10) и точного (11) решений микропроводов с разной проводимостью

вать формулу (11). Если взять проводник из магнитомягкого железа того же радиуса, но у которого проводимость в 20 раз выше и, следовательно, толщина скин-слоя за счет проводимости существенно меньше, погрешность для магнитной проницаемости $\mu_1 \geq 1000$ составляет всего несколько процентов.

Импеданс

Импеданс определим как отношение амплитудной разности потенциалов на внутреннем внешнем проводе коаксиальной линии, к амплитуде тока во внутреннем проводнике $Z = U/I$, где

$$U = \int_a^b E_r(r)dr, \quad I = 2\pi a H_\varphi(a)$$

Используя формулы (2), (3) и (5), получаем:

$$U = -\frac{i\gamma}{k_2^2} E_z(a) = \frac{i\gamma}{k_2^2} A J_0(k_1 a), \quad I = 2\pi a H_\varphi = -2\pi a i \frac{\varepsilon_1 \omega}{k_1 c} A J_1(k_1 a), \quad Z = -\frac{1}{2\pi a} \frac{k_1 c}{k_2^2 \varepsilon_1 \omega} \gamma \frac{J_0(k_1 a)}{J_1(k_1 a)}$$

Используя (6) и соответствующее приближение, получим:

$$Z = \frac{1}{2\pi} \frac{\gamma c}{\varepsilon_2 \omega} \ln b/a$$

Перейдем к однопроводной линии.

Однопроводная линия

В [1] приводится приближенное выражение для постоянной распространения в однопроводной металлической линии:

$$\gamma \approx \frac{\omega}{c} \left(1 + \frac{1+i}{4} \frac{1}{\ln 2/C_1 p a} \frac{\delta}{a} \right) \quad (12)$$

Здесь обозначения те же, что и в (10), $\ln(C_1) \approx 0.5772$, $C_1 \approx 1.781$ – постоянная Эйлера, p – волновое число, характеризующее поля в окрестности провода

Это выражение можно получить, если решение уравнения (4) искать в виде функций Ганкеля, которые на больших расстояниях от провода экспоненциально затухают. Функции Ганкеля выбираем такие, чтобы мнимая часть волнового числа $p'' \geq 0$

В этом случае формула (8) выглядит следующим образом

$$p^2 = \frac{1-i}{2} \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \mu_1 \frac{\delta}{a} \frac{1}{\ln C_1 p a / 2} \varepsilon_2 \frac{J_0(k_1 a)}{J_1(k_1 a)}. \quad (13)$$

Волновые числа удовлетворяют уравнению

$$\gamma^2 = p^2 + (\omega/c)^2 \varepsilon_2 \mu_2. \quad (14)$$

Точное выражение для постоянной распространения вдоль провода в такой постановке

$$\gamma^2 = \varepsilon_2 \mu_2 \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \left(1 - \frac{1-i}{2} \frac{1}{\ln \frac{C_1 p a}{2}} \mu_1 \frac{\delta}{a} \varepsilon_2 \frac{J_0(k_1 a)}{J_1(k_1 a)} \right) \quad (15)$$

Для приближенного решения формулы (13) Зоммерфельд воспользовался методом итераций, основанный на том, что $\ln p a$ изменяется значительно медленней, чем $p a$ [2].

Обозначим $u = (C_1 p a / 2)^2$, $v = \frac{C_1^2}{2} \frac{1-i}{2} \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \mu_1 a \delta \varepsilon_2 \frac{J_0(k_1 a)}{J_1(k_1 a)}$. Тогда (13) преобразуется в $u \ln u = v$. Если найдено приближенное значение u_n , то более точное u_{n+1} получают по формуле $u_{n+1} \ln u_{n+1} = v$. В нулевом приближении можно положить $u_0 = v$.

Затухание и радиус поля

Оценим характеристики поля волны в окрестности провода однопроводной линии, а также затухание вдоль линии.

[1] Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. // Теория волн. М.: Наука, 2-е изд. (1990) стр.234

[2] Батыгин В.В, Топтыгин И.Н. //Сборник задач по электродинамике М.: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика (2002) стр. 452

Распределение поля в окрестности провода описывается функцией Ганкеля, приближенное выражение которой на малых расстояниях описывается формулой¹ $E_r \approx \left| \frac{2i}{\pi} \ln \frac{C_1 p'' r}{2i} \right|$.

Максимальная концентрация поля существует вблизи провода, и волна имеет поверхностный характер. Это дает возможность измерения напряжения в линии установкой потенциометрического датчика непосредственно вблизи провода.

На рис. 2 показано распределение амплитудного значения поля для разных частот от 50 Гц до 500 МГц проводника радиуса 5 мм с проводимостью $5.2 \times 10^{17} \text{ сек}^{-1}$. Радиус поля уменьшается с увеличением частоты.

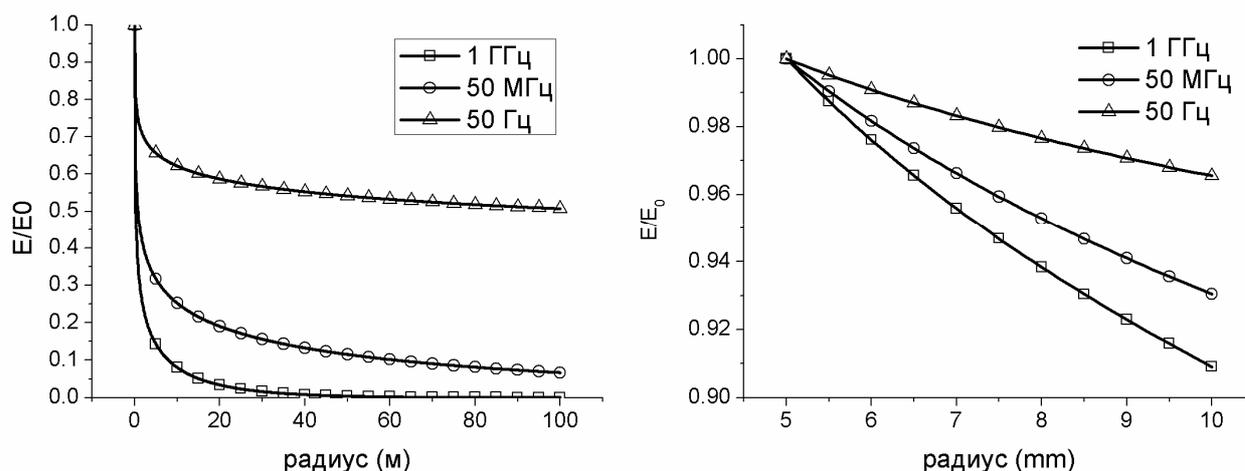


Рис. 2. Распределение амплитуды поля в окрестности провода для разных частот. Справа показано распределение вблизи поверхности

Заметим здесь, что мы рассматриваем задачу в отсутствии обратного токопровода в линии. В реальных линиях электропередач, например, такой провод присутствует, поэтому радиус поля порядка расстояния между прямым и обратным токопроводом.

Наиболее важной характеристикой однопроводной линии является затухание в ней, т.к. она определяет возможность использования ее в качестве линии связи, для осуществления локации и пр. Затухание вдоль линии определяется мнимой частью p'' , что следует из (14).

Анализ формулы (15) показывает, что для заданной частоты потери в линии тем меньше, чем меньше отношение толщины скин-слоя к радиусу провода. То есть, чем больше проводимость металла, больше его радиус, тем меньше затухание. При прочих равных условиях затухание на единицу длины обратно пропорционально корню из частоты.

Это иллюстрируется на рисунках ниже. Рис. 3 показывает зависимость затухания в децибелах от частоты в гигагерцах на длине 10, 50 и 100 км линии. Радиус провода и проводимость, принятая в расчетах, были 5 мм и $5.2 \times 10^{17} \text{ сек}^{-1}$ соответственно. На частоте 100 МГц затухание составляет около 70 дБ/100км, а на частоте 1000 МГц – порядка 30дБ/10км. Вполне приемлемый результат для многих приложений.

[¹] Г. Корн, Т. Корн. // Справочник по математике М., (1970) 720 с

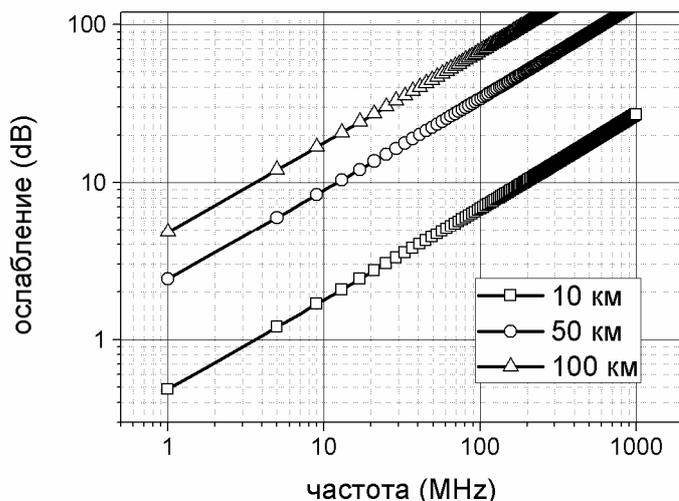


Рис. 3. Затухание в дБ в зависимости от частоты на длине линии 10, 50 и 100 км.

На рис. 4 представлена расчетная зависимость величины затухания для частот 50, 500 и 1000 МГц, от расстояния. На частоте 1 ГГц уровень 100 дБ достигается на расстоянии примерно 40 км.

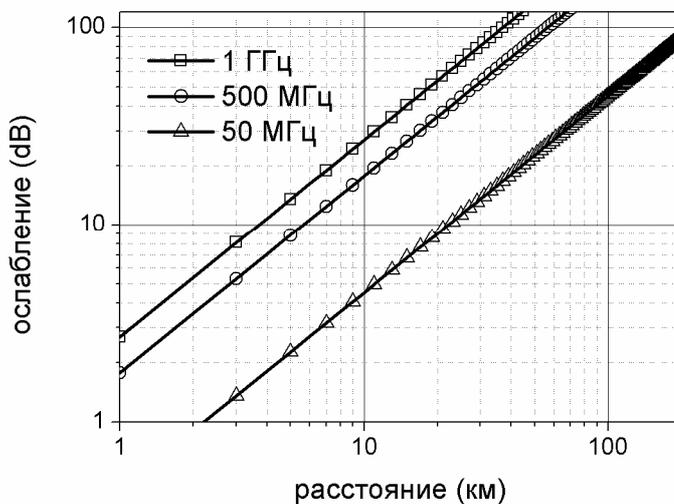


Рис. 4. Затухание в линии на частотах 50 МГц, 500 МГц и 1000 МГц. Радиус провода 5 мм.

Наконец, зависимость затухания от радиуса провода показана на рис. 5 для расстояния 10 км. Видно, что дальность существенно увеличивается с ростом радиуса провода.

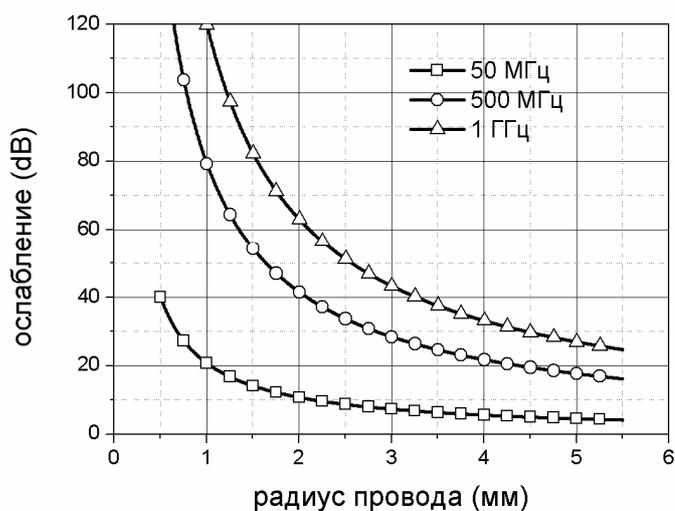


Рис. 6. Зависимость затухания от радиуса провода на разных частотах на расстоянии 10 км.

Работа проводилась при финансовой поддержке Министерства образования и науки по Госконтракту № 12.527.11.0002.